

Problemas sencillos de optimización

1. Un colegio va a realizar un paseo. En total participarán 400 personas entre alumnos y profesores. Al llamar a una empresa de transportes, obtienen la siguiente información:

La empresa dispone de 8 buses con 40 asientos y 10 buses con 50 asientos.

Para el día del paseo habrá 9 choferes disponibles. El costo de arriendo es de \$ 30 000 por cada bus de 40 asientos y de \$40 000 por cada bus de 50 asientos.

Antes de contratar los buses, el Director del colegio decide analizar cuántos buses de cada tipo les conviene arrendar para que el arriendo resulte lo más económico posible.

2. Dos mataderos P y Q, se encargan de suministrar la carne consumida semanalmente en tres ciudades, R, S y T; en cada ciudad entregan 20, 22 y 14 toneladas respectivamente. El matadero P produce cada semana 26 toneladas de carne, mientras que el Q, 30. Se sabe que los costos de transporte, por tonelada de carne, desde cada matadero a cada ciudad, expresados en la misma unidad, están resumidos en la siguiente tabla:

	R	S	T
P	1	3	1
Q	2	1	1

Determinar cuál es la distribución de transporte que implica un costo mínimo.

Problemas de programación lineal

1. Resuelve el siguiente problema (visto anteriormente) definiendo la función objetivo y utilizando las técnicas de la programación lineal: Un colegio va a realizar un

paseo. En total participarán 400 personas entre alumnos y profesores. Al llamar a una empresa de transportes, obtienen la siguiente información: La empresa disponen de 8 buses con 40 asientos y 10 buses con 50 asientos. Para el día del paseo habrá 9 choferes disponibles. El costo de arriendo es de \$ 30.000 por cada bus de 40 asientos y de \$40.000 por cada bus de 50 asientos. Antes de contratar los buses, el Director del colegio decide analizar cuántos buses de cada tipo les conviene arrendar para que el arriendo resulte lo más económico posible.

2. Un atleta debe tomar por lo menos 4 unidades de vitamina A, 6 unidades de vitamina B y 12 unidades de vitamina C cada día. Hay dos productos en polvo, P1 y P2 que, por cada frasco, contienen las siguientes unidades de esas vitaminas:

	A	B	C
P1	4	1	4
P2	1	6	6

Si el precio de un frasco de P1 es de \$5.000 y el de un frasco de P2 es de \$8.000, averiguar cómo deben mezclarse ambos productos para obtener las vitaminas deseadas con el mínimo precio.

3. Resuelve el siguiente problema definiendo la función objetivo y utilizando las técnicas de la programación lineal: dos mataderos, P y Q, se encargan de suministrar la carne consumida semanalmente en tres ciudades, R, S y T: 20, 22 y 14 toneladas, respectivamente. El matadero P produce cada semana 26 toneladas de carne, mientras que Q 30. Sabiendo que los costos de transporte, por tonelada de carne, desde cada matadero a cada ciudad están expresado en la siguiente tabla:

	R	S	T
P	1	3	1
Q	2	1	1

Determinar cuál es la distribución de transporte que implica un costo mínimo.

4. Un pastelero dispone de 150 kg de harina, 22 kg de azúcar y 27.5 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles Pop y Sup. Para fabricar una docena de

pasteles de tipo Pop necesita 3 kg de harina, 1 kg de azúcar y 1 kg de mantequilla y para hacer una docena de pasteles de tipo Sup necesita 6 kg de harina, medio kilo de azúcar y 1 kg de mantequilla. El beneficio que obtiene por una docena de pasteles de tipo Pop es \$2000 y por una docena de tipo Sup es \$3000. Hallar el número de docenas que tiene que fabricar de cada clase para que la ganancia sea máxima.

5. El abuelo de Juan ha recibido 12 millones de pesos como jubilación. Le ofrecen, por una parte, adquirir al menos un 30% de un departamento que vale 10 millones y renta el 0.5% de arriendo mensual y, por otra parte, ser socio de hasta un 50% de un restaurante cuyo valor es de 5 veces la utilidad del año pasado. Si la utilidad generada por el restaurante en el año pasado fue de 4 millones, y este año se estima una utilidad similar, entonces, ¿Cuál es el problema de programación lineal que Juan debe resolver para asesorar a su abuelo?

Ejercicios resueltos de programación lineal1

1 A una persona le tocan 10 millones de pesos en una lotería y le aconsejan que las invierta en dos tipos de acciones, A y B. Las de tipo A tienen más riesgo pero producen un beneficio del 10 %. Las de tipo B son más seguras, pero producen sólo el 7% anual. Después de varias deliberaciones decide invertir como máximo 6 millones en la compra de acciones A y, por lo menos, 2 millones en la compra de acciones B. Además, decide que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B. ¿Cómo deberá invertir 10 millones para que le beneficio anual sea máximo?

Sea:

x = cantidad invertida en acciones A

y = cantidad invertida en acciones B

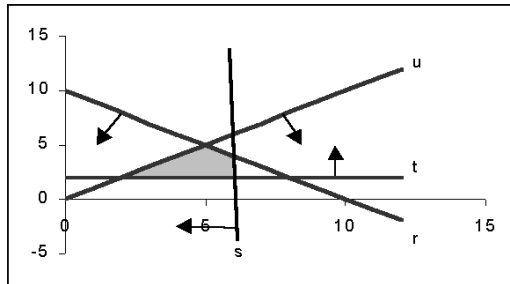
La función objetivo es:

$$f(x, y) = \frac{10x}{100} + \frac{7y}{100}$$

Y las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ x \leq 6 \\ y \geq 2 \\ x \geq y \end{array} \right\}$$

La zona de soluciones factibles es:



Siendo los vértices del recinto:

A intersección de u,t:

$$\left. \begin{array}{l} x = y \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow A(2,2)$$

B intersección de r,u:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ x = y \end{array} \right\} \Rightarrow B(5,5)$$

C intersección de r,s:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 10 \\ x = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow C(6,4)$$

D intersección de s,t:

$$\left. \begin{array}{l} x = 6 \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow D(6,2)$$

La función objetivo toma en ellos los valores:

$$\begin{aligned}
 f(A) &= \frac{20}{100} + \frac{14}{100} = \frac{34}{100} = 0,34 \quad \text{millones} \\
 f(B) &= \frac{50}{100} + \frac{35}{100} = \frac{85}{100} = 0,85 \quad \text{millones} \\
 f(C) &= \frac{60}{100} + \frac{28}{100} = \frac{88}{100} = 0,88 \quad \text{millones} \quad \text{máximo} \\
 f(D) &= \frac{60}{100} + \frac{14}{100} = \frac{74}{100} = 0,74 \quad \text{millones}
 \end{aligned}$$

Siendo la solución óptima invertir 6 millones en acciones tipo A y 4 en acciones tipo B

2 Un estudiante dedica parte de su tiempo al reparto de propaganda publicitaria. La empresa A le paga 5 ptas. por cada impreso repartido y la empresa B, con folletos más grandes, le paga 7 ptas. por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos A, en la que caben 120, y otra para los impresos B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día es capaz de repartir 150 impresos como máximo. Lo que se pregunta el estudiante es: ¿Cuántos impresos habrá que repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

Llamemos:

$x = n$: de impresos diarios tipo A repartidos.

$y = n$: de impresos diarios tipo B repartidos.

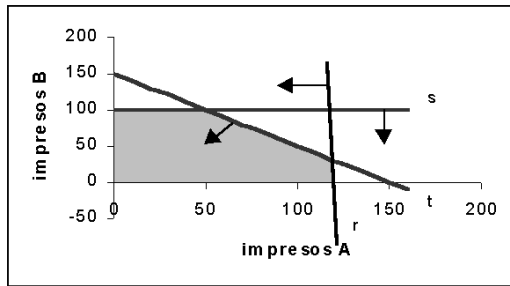
La función objetivo es:

$$f(x, y) = 5x + 7y$$

Las restricciones:

$$\left. \begin{aligned}
 x &\geq 0 \\
 y &\geq 0 \\
 r \equiv x &\leq 120 \\
 s \equiv y &\leq 100 \\
 t \equiv x + y &\leq 150
 \end{aligned} \right\}$$

La zona de soluciones factibles es:



Vértices:

A(0, 100)

B intersección de s,t:

$$\left. \begin{array}{l} y = 100 \\ x + y = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow B(50, 100)$$

C intersección de r,t:

$$\left. \begin{array}{l} x = 120 \\ x + y = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow C(120, 30)$$

D (120, 0)

Siendo los valores de la función objetivo:

$$f(A) = 7 \cdot 100 = 700$$

$$f(B) = 5 \cdot 50 + 7 \cdot 100 = 950 \quad \text{máx imo}$$

$$f(C) = 5 \cdot 120 + 7 \cdot 30 = 810$$

$$f(D) = 5 \cdot 120 = 600$$

Debe repartir 50 impresos tipo A y 100 tipo B para una ganancia máxima diaria de 950 ptas..

3 Un comerciante acude a cierto mercado a comprar naranjas con 50000 pesos. Le ofrecen dos tipos de naranjas: las de tipo A a 50 pesos el kg. y las de tipo B a 80 pesos el kg. Sabiendo que sólo dispone en su furgoneta de espacio para transportar 700 kg. de naranjas como máximo y que piensa vender el kg. de naranjas tipo A a 58 pesos y el kg. de tipo B a 90 pesos, contestar justificando las respuestas:

- ¿Cuántos kg. de naranjas de cada tipo deberá comprar para obtener máximo beneficio?
- ¿Cuál será ese beneficio máximo?

Llamemos:

x = kg. de naranjas tipo A comprados.

y = kg. de naranjas tipo B comprados.

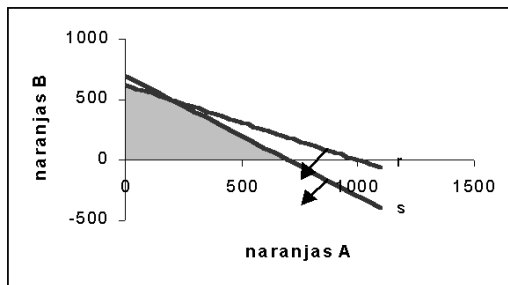
La función objetivo que da el beneficio es:

$$f(x, y) = (58 - 50)x + (90 - 80)y = 8x + 10y$$

Y las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ r \equiv 50x + 80y \leq 50000 \Rightarrow 5x + 8y \leq 5000 \\ s \equiv x + y \leq 700 \end{array} \right\}$$

La zona de soluciones factibles es:



Y los vértices:

A(0, 625)

B intersección de r,s:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 8y = 5000 \\ x + y = 700 \end{array} \right\} \Rightarrow B(200, 500)$$

C(700, 0)

Y, en ellos la función objetivo toma los valores:

$$f(A) = 10 \cdot 625 = 6250$$

$$f(B) = 8 \cdot 200 + 10 \cdot 500 = 6600 \quad \text{máximo}$$

$$f(C) = 8 \cdot 700 = 5600$$

Ha de comprar 200 kg. de naranjas A y 500 de naranjas B para obtener un beneficio máximo de 6600 pesos.

4 Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana. Un traje requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana, y un vestido de mujer requiere 2 m^2 de cada una de las dos telas. Calcular el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios si un traje y un vestido se venden al mismo precio

Sean:

$x = n$: de trajes.

$y = n$: de vestidos

$a =$ precio común del traje y el vestido.

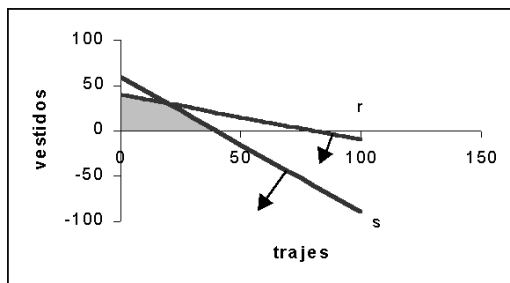
Función objetivo:

$$f(x, y) = ax + ay$$

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ r \equiv x + 2y \leq 80 \\ s \equiv 3x + 2y \leq 120 \end{array} \right\}$$

Zona de soluciones factibles:



Vértices:

A(0, 40)

B intersección de r y s:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{array} \right\} \Rightarrow B(20, 30)$$

C(40, 0)

Los valores de la función objetivo son:

$$f(A) = 40a$$

$$f(B) = 20a + 30a = 50a \quad \text{máximo}$$

$$f(C) = 40a$$

El máximo beneficio lo obtendrá fabricando 20 trajes y 30 vestidos.

5 Un constructor va a edificar dos tipos de viviendas A y B. Dispone de 600 millones de pesos y el coste de una casa de tipo A es de 13 millones y 8 millones una de tipo B. El número de casas de tipo A ha de ser, al menos, del 40 % del total y el de tipo B, el 20 % por lo menos. Si cada casa de tipo A se vende a 16 millones y cada una de tipo B en 9. ¿Cuántas casas de cada tipo debe construir para obtener el beneficio máximo?

Llamamos:

$x = n$: de viviendas construidas tipo A

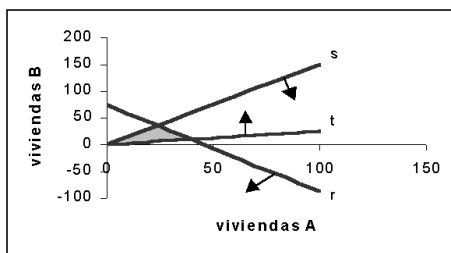
$y = n$: de viviendas construidas tipo B.

La función objetivo es:

$$f(x, y) = (16 - 13)x + (9 - 8)y = 3x + y$$

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ r \equiv 13x + 8y \leq 600 \\ s \equiv x \geq \frac{(x+y) \cdot 40}{100} \Rightarrow 3x - 2y \geq 0 \\ t \equiv y \geq \frac{(x+y) \cdot 20}{100} \Rightarrow x - 4y \leq 0 \end{array} \right\}$$



La zona de soluciones factibles queda, pues:

Siendo los vértices:

A intersección de r,s:

$$\left. \begin{array}{l} 13x + 8y = 600 \\ 3x - 2y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow A(24,36)$$

B intersección de r,t:

$$\left. \begin{array}{l} 13x + 8y = 600 \\ x - 4y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow B(40,10)$$

C (0, 0)

Y la función objetivo toma los valores:

$$f(A) = 3 \cdot 24 + 36 = 108$$

$$f(B) = 3 \cdot 40 + 10 = 130$$

Teniendo que vender 40 viviendas tipo A y 10 tipo B para obtener un beneficio máximo de 130 millones.

Ejercicios resueltos de programación lineal2

1 Cierta persona dispone de 10 millones como máximo para repartir entre dos tipos de inversión (A y B). En la opción A desea invertir entre 2 y 7 millones. Además, quiere destinar a esa opción, como mínimo, tanta cantidad de dinero como a la B. ¿Qué cantidades debe invertir en cada una de las dos opciones? Plantear el problema y representar gráficamente el conjunto de soluciones.

Sabiendo que el rendimiento de la inversión será del 9 % en la opción A y del 12 % en la B, ¿Qué cantidad debe invertir en cada una para optimizar el rendimiento global? ¿A cuánto ascenderá

a) Sean.

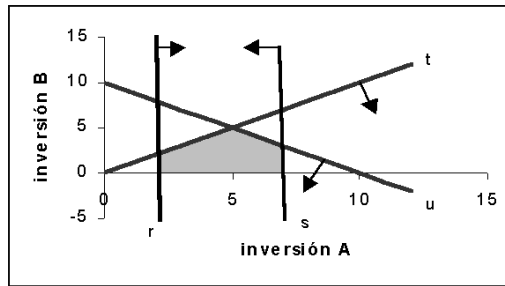
x= cantidad invertida en acciones tipo A

y= cantidad invertida en acciones tipo B

Las restricciones son:

$$\left. \begin{array}{l} r \equiv x \geq 2 \\ s \equiv x \leq 7 \\ t \equiv x \geq y \\ u \equiv x + y \leq 10 \end{array} \right\}$$

Puede invertir en cada una de las dos opciones las cantidades correspondientes a cada uno de los puntos de la zona sombreada de la siguiente gráfica:



b) La función de beneficios es:

$$f(x,y) = \frac{9x}{100} + \frac{12x}{100}$$

Y los vértices de la zona sombreada son:

A intersección de r,t:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ x = y \end{array} \right\} \Rightarrow A(2,2)$$

B intersección de t,u:

$$\left. \begin{array}{l} x = y \\ x + y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow B(5,5)$$

C intersección de s,u, o sea C(7, 3)

D(7, 0)

E(2, 0)

Los valores de f en esos puntos son:

$$f(A) = \frac{2 \cdot 9}{100} + \frac{2 \cdot 12}{100} = \frac{42}{100} = 0,48$$

$$f(B) = \frac{5 \cdot 9}{100} + \frac{5 \cdot 12}{100} = \frac{105}{100} = 1,05 \quad \text{máximo}$$

$$f(C) = \frac{7 \cdot 9}{100} + \frac{3 \cdot 12}{100} = \frac{99}{100} = 0,99$$

$$f(D) = \frac{7 \cdot 9}{100} = 0,63$$

$$f(E) = \frac{2 \cdot 9}{100} = 0,18$$

Ha de invertir, pues 5 millones en A y 5 en B para obtener un beneficio máximo de

1,05 millones, o sea 1050000 ptas.

2 Una refinería de petróleo tiene dos fuentes de petróleo crudo: crudo ligero, que cuesta 35 dólares por barril y crudo pesado a 30 dólares el barril. Con cada barril de crudo ligero, la refinería produce 0,3 barriles de gasolina (G), 0,2 barriles de combustible para calefacción (C) y 0,3 barriles de combustible para turbinas (T), mientras que con cada barril de crudo pesado produce 0,3 barriles de G, 0,4 barriles de C y 0,2 barriles de T. La refinería ha contratado el suministro de 900000 barriles de G, 800000 barriles de C y 500000 barriles de T. Hallar las cantidades de crudo ligero y pesado que debe comprar para poder cubrir sus necesidades al costo mínimo.

Sean:

X= n: de barriles comprados de crudo ligero.

Y= n: de barriles comprados de crudo pesado.

La tabla de producción de cada producto con arreglo al tipo de crudo es:

	G	C	T
Ligero	0,3	0,2	0,3
Pesado	0,3	0,4	0,2

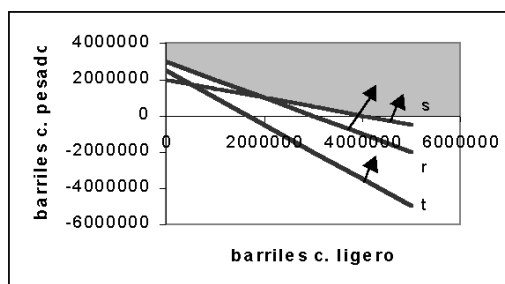
La función objetivo que hay que minimizar es:

$$f(x, y) = 35x + 30y$$

Las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ r \equiv 0,3x + 0,3y \geq 900000 \Rightarrow x + y \geq 3000000 \\ s \equiv 0,2x + 0,4y \geq 800000 \Rightarrow x + 2y \geq 4000000 \\ t \equiv 0,3x + 0,2y \geq 500000 \Rightarrow 3x + 2y \geq 5000000 \end{array} \right\}$$

Y la zona de soluciones factibles:



Los vértices son:

A(0, 3000000)

B intersección de r,s:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 3000000 \\ x + 2y = 4000000 \end{array} \right\} \Rightarrow B(2000000, 1000000)$$

C(4000000, 0)

Y, en ellos la función objetivo presenta los valores:

$$f(A) = 30 \cdot 3000000 = 90000000 \quad \text{mínimo}$$

$$f(B) = 35 \cdot 2000000 + 30 \cdot 1000000 = 100000000$$

$$f(C) = 35 \cdot 4000000 = 140000000$$

Siendo la solución de mínimo coste la compra de 3000000 de barriles de crudo ligero y ninguno de crudo pesado para un coste de 90000000

3 La fábrica Gepetto S.A., construye soldados y trenes de madera. El precio de venta al público de un soldado es de 2700 pesos y el de un tren 2100 pesos. Gepetto estima que fabricar un soldado supone un gasto de 1000 pesos de materias primas y de 1400 pesos de costes laborales. Fabricar un tren exige 900 pesos de materias primas y 1000 pesos de costes laborales. La construcción de ambos tipos de juguetes requiere un trabajo previo de carpintería y un proceso final de acabado (pintura, revisión de las piezas fabricadas, empaquetado, etc.). Para fabricar un soldado se necesita 1 hora de carpintería y 2 horas de proceso final de acabado. Un tren necesita 1 hora de carpintería y 1 hora para el proceso de acabado. Gepetto no tiene problemas de abastecimiento de materias primas, pero sólo puede contar semanalmente con un máximo de 80 horas de carpintería y un máximo de 100 horas para los trabajos de acabado. Por exigencias del mercado, Gepetto fabrica, como máximo, 40 soldados a la semana. No ocurre así con los trenes, para los que no hay ningún tipo de restricción en cuanto al número de unidades fabricadas.

Obtén el número de soldados y de trenes que semanalmente deberá fabricar la empresa para maximizar sus beneficios.

Sea:

x= n: de soldados fabricados semanalmente.

y= n: de trenes fabricados semanalmente.

La función a maximizar es:

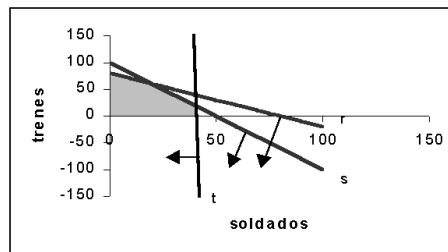
$$f(x, y) = (2700 - 1000 - 1400)x + (2100 - 900 - 1000)y = 300x + 200y$$

La tabla de horas de trabajo:

	Carpintería	Acabado
Soldados	1	2
Trenes	1	1

Las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ r \equiv x + y \leq 80 \\ s \equiv 2x + y \leq 100 \\ t \equiv x \leq 40 \end{array} \right\}$$



La zona de soluciones factibles es:

Siendo los vértices:

A(0, 80)

B intersección de r,s:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 80 \\ 2x + y = 100 \end{array} \right\} \Rightarrow B(20,60)$$

C intersección de s,t:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y = 100 \\ x = 40 \end{array} \right\} \Rightarrow C(40,20)$$

D(40, 0).

En los que la función objetivo vale:

$$f(A) = 200 \cdot 80 = 16000$$

$$f(B) = 300 \cdot 20 + 200 \cdot 60 = 18000 \quad \text{máximo}$$

$$f(C) = 300 \cdot 40 + 200 \cdot 20 = 16000$$

$$f(D) = 40 \cdot 300 = 12000$$

Debiendo fabricar 20 soldados y 60 trenes para un beneficio máximo de 18000 pesos.

4 Una campaña para promocionar una marca de productos lácteos se basa en el reparto gratuito de yogures con sabor a limón o a fresa. SE decide repartir al menos 30000 yogures. Cada yogur de limón necesita para su elaboración 0,5 gr. de un producto de fermentación y cada yogur de fresa necesita 0,2 gr. de ese mismo producto. Se dispone de 9 kg. de ese producto para fermentación. El coste de producción de un yogur de fresa es doble que el de un yogur de limón. ¿Cuántos yogures de cada tipo se deben producir para que el coste de la campaña sea mínimo?

Llamemos:

$x = n$: de yogures de limón producidos.

$y = n$: de yogures de fresa producidos.

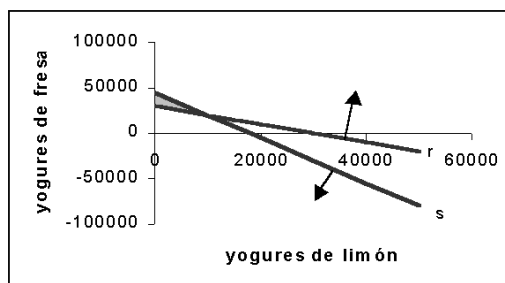
a = coste de producción de un yogur de limón.

La función a minimizar es:

$$f(x, y) = ax + 2ay$$

Y las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ r \equiv x + y \geq 30000 \\ s \equiv 0,5x + 0,2y \leq 9000 \Rightarrow 5x + 2y \leq 90000 \end{array} \right\}$$



La zona de soluciones factibles es:

Siendo los vértices:

A(0, 45000)

B(0, 30000)

C intersección de r y s:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 30000 \\ 5x + 2y = 90000 \end{array} \right\} \Rightarrow C(10000, 20000)$$

En los que la función objetivo toma los valores:

$$f(A) = 2a \cdot 45000 = 90000a$$

$$f(B) = 2a \cdot 30000 = 60000a$$

$$f(C) = a \cdot 10000 + 2a \cdot 20000 = 50000a \quad \text{mínimo}$$

Hay que fabricar, pues, 10000 yogures de limón y 20000 yogures de fresa para un coste mínimo de 50000a

5 Una fábrica de carrocerías de automóviles y camiones tiene 2 naves. En la nave A, para hacer la carrocería de un camión, se invierten 7 días-operario, para fabricar la de un coche se precisan 2 días-operario. En la nave B se invierten 3 días-operario tanto en carrocerías de camión como de coche. Por limitaciones de mano de obra y maquinaria, la nave A dispone de 300 días-operario, y la nave B de 270 días-operario. Si los beneficios que se obtienen por cada camión son de 6 millones de pesos y de 3 millones por cada coche. ¿Cuántas unidades de cada clase se deben producir para maximizar las ganancias?

Sea:

x= n: de camiones fabricados.

y= n: de coches fabricados.

La función a maximizar es:

$$f(x, y) = 6x + 3y$$

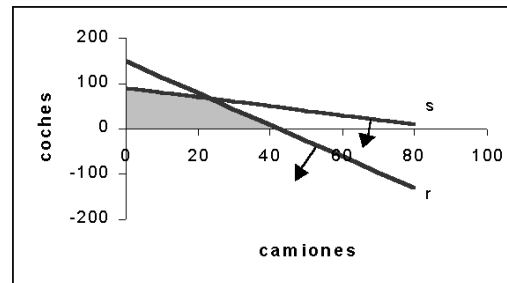
La tabla de días-operario para cada nave es:

	Días-operario (camión)	Días-operario (coche)
Nave A	7	2
Nave B	3	3

Las restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ r \equiv 7x + 2y \leq 300 \\ s \equiv 3x + 3y \leq 270 \Rightarrow x + y \leq 90 \end{array} \right\}$$

La zona de soluciones factibles es:



Siendo los vértices:

$$A(0, 90)$$

B intersección de r,s:

$$\left. \begin{array}{l} 7x + 2y = 300 \\ x + y = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow B(24, 66)$$

$$C\left(\frac{300}{7}, 0\right)$$

En los que la función objetivo toma los valores:

$$f(A) = 3 \cdot 90 = 270$$

$$f(B) = 6 \cdot 24 + 3 \cdot 66 = 342 \quad \text{máximo}$$

$$f(C) = 6 \cdot \frac{300}{7} = 257,1$$

Hay que fabricar 24 camiones y 66 coches para un beneficio máximo de 342 millones de pesos.

6 Un pastelero fabrica dos tipos de tartas T1 y T2, para lo que usa tres ingredientes A, B y C. Dispone de 150 kg. de A, 90 kg. de B y 150 kg. de C. Para fabricar una tarta T1 debe mezclar 1 kg. de A, 1 kg. de B y 2 kg. de C, mientras que para hacer una tarta T2 se necesitan 5 kg. de A, 2 kg. de B y 1 kg. de C.

- Si se venden las tartas T1 a 1000 pesos la unidad y las T2 a 2300 pesos. ¿Qué cantidad debe fabricar de cada clase para maximizar sus ingresos?
- Si se fija el precio de una tarta del tipo T1 en 1500 pesos. ¿Cuál será el precio

de una tarta del tipo T2 si una solución óptima es fabricar 60 tartas del tipo T1 y 15 del tipo T2?

a. Sea:

$x = n$: de tartas T1

$y = n$: de tartas T2

La función objetivo es:

$$f(x, y) = 1000x + 2300y$$

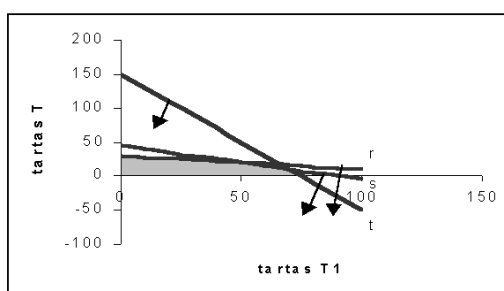
La tabla de contingencia es:

	Ingrediente A	Ingrediente B	Ingrediente C
Tarta T1	1	1	2
Tarta T2	5	2	1

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ r \equiv x + 5y \leq 150 \\ s \equiv x + 2y \leq 90 \\ t \equiv 2x + y \leq 150 \end{array} \right\}$$

Zona de soluciones factibles:



Vértices:

A(0, 30)

B intersección de r.s:

$$\left. \begin{array}{l} x + 5y = 150 \\ x + 2y = 90 \end{array} \right\} \Rightarrow B(50,20)$$

C intersección de s,t:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 90 \\ 2x + y = 150 \end{array} \right\} \Rightarrow C(70,10)$$

$$D(75, 0)$$

Valores de la función objetivo:

$$f(A) = 2300 \cdot 30 = 69000$$

$$f(B) = 1000 \cdot 50 + 2300 \cdot 20 = 96000 \quad \text{máximo}$$

$$f(C) = 1000 \cdot 70 + 2300 \cdot 10 = 93000$$

$$f(D) = 1000 \cdot 75 = 75000$$

Hay que fabricar 50 tartas T1 y 20 tartas T2 para un beneficio máximo de 96000 pesos.

- a. Llamemos ahora p al nuevo precio de la tarta T2. La función objetivo es entonces

$$f(x, y) = 1500x + py$$

Siendo iguales las restricciones. Si una solución óptima consiste en fabricar 60 tartas T1 y 15 T2, se tendrá que:

$$f(60, 15) = f(p) = 1500 \cdot 60 + 15p \text{ es máximo} \Rightarrow 90000 + 15p \quad \text{máximo}$$

Para los puntos A, B, C y D anteriores:

$$f(A) = 30p$$

$$f(B) = 1500 \cdot 50 + 20p = 75000 + 20p$$

$$f(C) = 1500 \cdot 70 + 10p = 105000 + 10p$$

$$f(D) = 1500 \cdot 75 = 112500$$

Se ha de cumplir, el el punto (60, 15) ha de ser máximo que:

$$90000 + 15p \geq 105000 + 10p \Rightarrow 5p \geq 15000 \Rightarrow p \geq 3000$$

El menor valor que cumple esta condición es p=3000 pesos y con él el beneficio sería:

$$90000 + 15 \cdot 3000 = 135000 \text{ pesos.}$$

7 Una fábrica produce chaquetas y pantalones. Tres máquinas (de cortar, coser y teñir) se emplean en la producción. Fabricar una chaqueta representa emplear la máquina de cortar una hora, la de coser tres horas y la de teñir una hora; fabricar unos pantalones representa usar la máquina de cortar una hora, la de coser una hora y la de teñir ninguna. La máquina de teñir se puede usara durante tres horas, la de coser doce y la de cortar 7. Todo lo que se fabrica es vendido y se obtiene un beneficio de ocho euros por cada chaqueta y de cinco por cada pantalón. ¿Cómo emplearíamos las máquinas para conseguir el beneficio máximo?

Llamamos:

$x = n$: de chaquetas fabricadas.

$y = n$: de pantalones fabricados.

Función objetivo:

$$f(x, y) = 8x + 5y$$

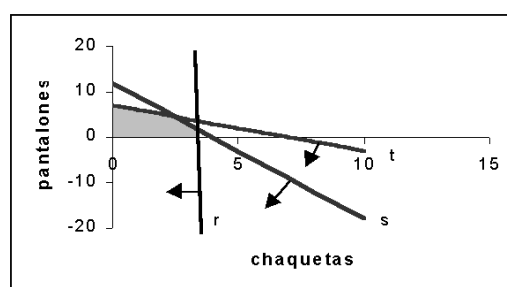
Tabla de uso de las máquinas:

	Cortar	Coser	Teñir
Chaqueta	1	3	1
Pantalón	1	1	-

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ r \equiv x \leq 3 \\ s \equiv 3x + y \leq 12 \\ t \equiv x + y \leq 7 \end{array} \right\}$$

Zona de soluciones factibles:



Vértices:

$$A(0, 7)$$

B intersección de s,t:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + y = 12 \\ x + y = 7 \end{array} \right\} \Rightarrow B\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

C intersección de r,s:

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ 3x + y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow C(3,3)$$

$$D(3,0)$$

Valores de la función objetivo:

$$f(A) = 5 \cdot 7 = 35$$

$$f(B) = 8 \cdot \frac{5}{2} + 5 \cdot \frac{9}{2} = \frac{95}{2} \quad \text{máximo}$$

$$f(C) = 8 \cdot 3 + 5 \cdot 3 = 39$$

$$f(D) = 8 \cdot 3 = 24$$

Como el máximo se alcanza para valores no enteros y no se puede fabricar un número no entero de chaquetas ni pantalones tomamos como solución aproximada 2 chaquetas y 5 pantalones lo cual sería exacto cambiando la restricción s por $3x + y \leq 11$ y obteniendo con ello un beneficio de 41 euros.

8 Un supermercado quiere promocionar una marca desconocida D de aceites utilizando una marca conocida C. Para ello hace la siguiente oferta: "Pague sólo a 250 pesos el litro de aceite C y a 125 pesos el litro de aceite D siempre y cuando: 1) Compre en total 6 litros o más, y 2) La cantidad comprada de aceite C esté comprendida entre la mitad y el doble de la cantidad comprada de aceite D". Si disponemos de un máximo de 3125 pesos, se pide:

- Representa gráficamente los modos de acogerse a la oferta.
- Acogiéndonos a la oferta, ¿Cuál es la mínima cantidad de aceite D que podemos comprar? ¿Cuál es la máxima de C?

a) Llamemos:

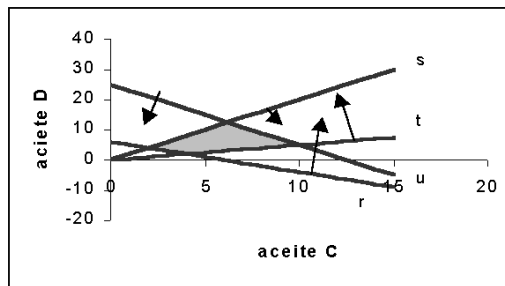
x= litros comprados de aceite C

y= litros comprados de aceite D

Las restricciones del problema son:

$$\left. \begin{aligned} x &\geq 0 & y &\geq 0 \\ r \equiv x + y &\geq 6 \\ s \equiv \frac{y}{2} \leq x &\Rightarrow y \leq 2x \\ t \equiv x &\leq 2y \\ u \equiv 250x + 125y \leq 3125 &\Rightarrow 2x + y \leq 25 \end{aligned} \right\}$$

Y la zona mediante la cual podemos acogernos a la oferta es la representada por cada uno de los puntos de la parte sombreada en la siguiente gráfica.



- b) La mínima cantidad de aceite D que debemos comprar acogiéndonos a la oferta (punto más bajo de la zona) es el punto intersección de las rectas r,t:

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 6 \\ x &= 2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \min D(4,2)$$

La máxima cantidad de aceite C para acogernos a la oferta (punto más a la derecha de la zona) es la intersección de las rectas t,u:

$$\left. \begin{aligned} 2x + y &= 25 \\ x &= 2y \end{aligned} \right\} \Rightarrow \max C(10,5)$$

Conclusión, la mínima cantidad de D es 2 litros y la máxima de C 10 litros.

9 Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 1,5 millones de pesos, y el modelo B en 2 millones. La oferta está limitada por las existencias, que son 20 coches del modelo A y 10 del B, queriendo vender, al menos, tantas unidades de A como de B. Por otra parte, para cubrir gastos de esa campaña, los ingresos obtenidos en ella deben ser, al menos de 6 millones de pesos. ¿Cuántos coches de cada modelo deberá vender para maximizar sus ingresos?

Llamemos:

x = coches vendidos del modelo A

y = coches vendidos del modelo B

Función objetivo:

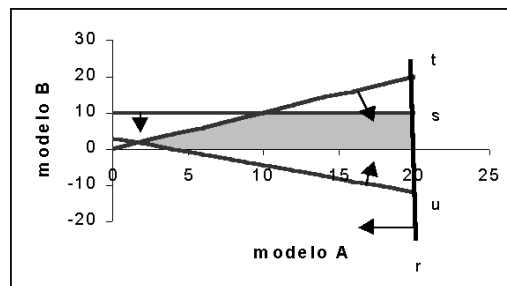
$$f(x, y) = 1,5x + 2y$$

Restricciones:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \quad y \geq 0 \\ r \equiv x \leq 20 \\ s \equiv y \leq 10 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} t \equiv x \geq y \\ u \equiv 1,5x + 2y \geq 6 \end{array} \right\}$$

Zona de soluciones factibles:



Vértices:

A intersección de s,t:

$$\left. \begin{array}{l} y = 10 \\ x = y \end{array} \right\} \Rightarrow A(10,10)$$

Intersección de r,s:

$$\left. \begin{array}{l} x = 20 \\ y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow B(20,10)$$

C(20, 0)

D(4, 0)

Valores de la función:

$$f(A) = 1,5 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 35$$

$$f(B) = 1,5 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 50 \quad \text{máximo}$$

$$f(C) = 1,5 \cdot 20 = 30$$

$$f(D) = 1,5 \cdot 4 = 6$$

Por lo cual se han de vender 20 coches modelo A y 10 coches modelo B para un beneficio máximo de 50 millones de ptas.

EJERCICIOS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

1. Disponemos de 210.000 euros para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones. Las del tipo A, que rinden el 10% y las del tipo B, que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 130.000 euros en las del tipo A y como mínimo 60.000 en las del tipo B. Además queremos que la inversión en las del tipo A sea menor que el doble de la inversión en B. ¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

Solución

Es un problema de programación lineal.

Llamamos x a la cantidad que invertimos en acciones de tipo A

Llamamos y a la cantidad que invertimos en acciones de tipo B

	inversión	rendimiento
Tipo A	x	$0,1x$
Tipo B	y	$0,08y$

210000

$0,1x+0,08y$

Condiciones que deben cumplirse (restricciones):

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$R_1 \quad x + y \leq 210000$$

$$R_2 \quad x \leq 130000$$

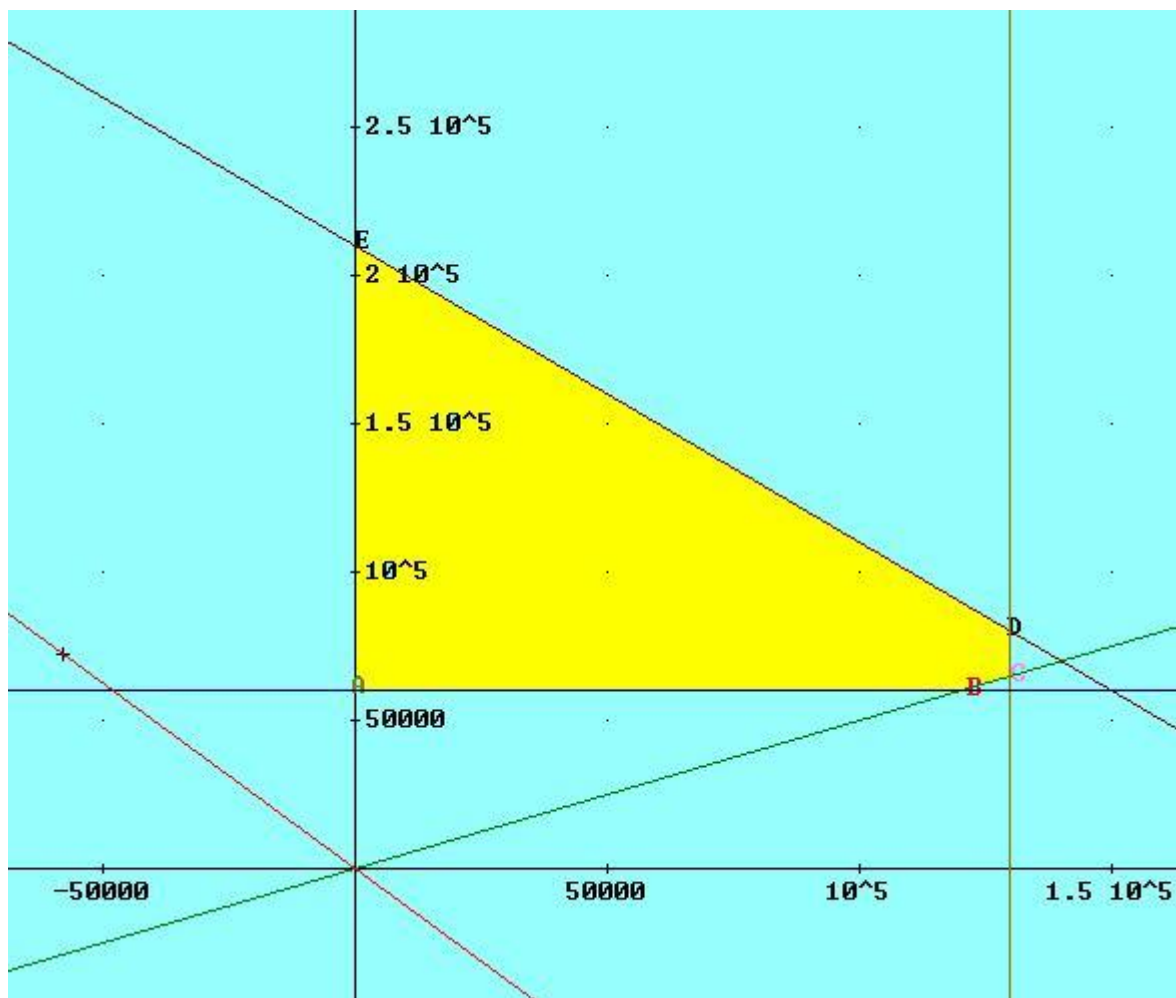
$$R_3 \quad y \geq 60000$$

$$R_4 \quad x \leq 2y$$

Dibujamos las rectas auxiliares asociadas a las restricciones para conseguir la región factible (conjunto de puntos que cumplen esas condiciones)

r_1	r_2 (paralela a OY)	r_3 (paralela a OX)	r_4																								
<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>210000</td></tr><tr><td>210000</td><td>0</td></tr></table>	x	y	0	210000	210000	0	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>130000</td><td>0</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	x	y	130000	0			<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>60000</td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>	x	y	0	60000			<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td></tr><tr><td>130000</td><td>65000</td></tr></table>	x	y	0	0	130000	65000
x	y																										
0	210000																										
210000	0																										
x	y																										
130000	0																										
x	y																										
0	60000																										
x	y																										
0	0																										
130000	65000																										

La región factible es la pintada de amarillo, de vértices A, B, C, D y E



A(0, 60000), B(120000, 60000), C(130000, 65000), D(130000, 80000) y E(0, 210000)

La función objetivo es;

$$F(x, y) = 0,1x + 0,08y$$

Si dibujamos la curva $F(x, y) = 0$ (en rojo) y la desplazamos se puede comprobar gráficamente que el vértice más alejado es el **D**, y por tanto es la solución óptima.

Comprobarlo analíticamente (es decir comprobar que el **valor máximo de la función objetivo, F**, se alcanza en el vértice **D**)

2. En una pastelería se hacen dos tipos de tartas: Vienesas y Reales. Cada tarta Vienesa necesita un cuarto de relleno por cada Kg. de bizcocho y produce un beneficio de 250 Ptas, mientras que una tarta Real necesita medio Kg. de relleno por cada Kg. de bizcocho y produce 400 Ptas. de beneficio. En la pastelería se pueden hacer diariamente hasta 150 Kg. de bizcocho y 50 Kg. de relleno, aunque por problemas de maquinaria no pueden hacer más de 125 tartas de cada tipo. ¿Cuántas tartas Vienesas y cuántas Reales deben vender al día para que sea máximo el beneficio?

Solución

En primer lugar hacemos una tabla para organizar los datos:

Tipo	Nº	Bizcocho	Relleno	Beneficio
T. Vienesas	x	1.x	0,250x	250x
T. Real	y	1.y	0,500y	400y
		150	50	

Función objetivo (hay que obtener su máximo): $f(x, y) = 250x + 400y$

Sujeta a las siguientes condiciones (restricciones del problema):

$$\begin{cases} x + y \leq 150 \\ 0,250x + 0,500y \leq 50 \\ x \leq 125 \\ y \leq 125 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Consideramos las rectas auxiliares a las restricciones y dibujamos la región factible:

Para $0,25x + 0,50y = 50$, ó $x + 2y = 200$

x	Y
0	100

200	0
-----	---

Para $x + y = 150$

x	Y
0	150
150	0

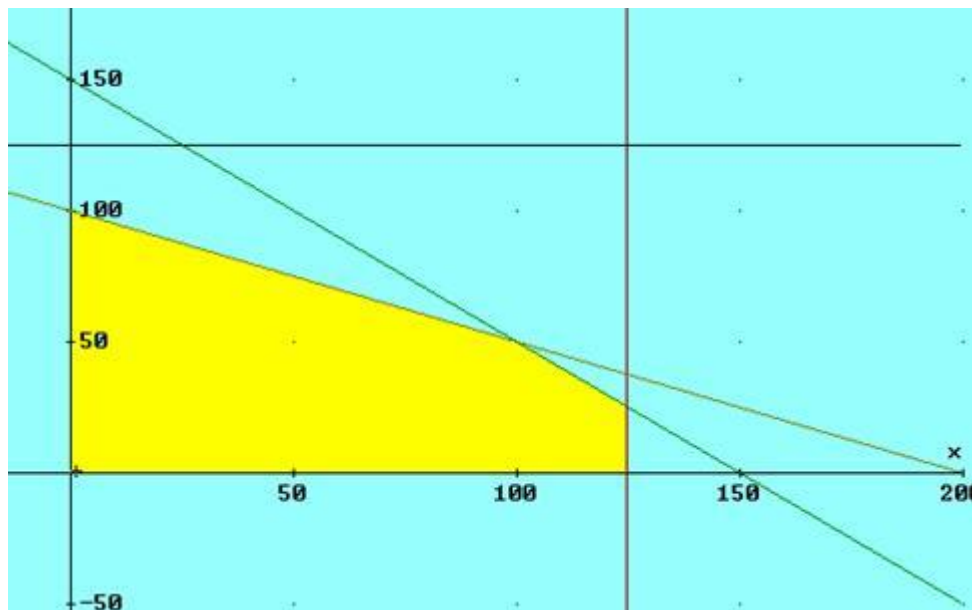
Las otras dos son paralelas a los ejes

Al eje OY $x=125$

Al eje Ox $y=125$

Y las otras restricciones (x e y mayor o igual a cero) nos indican que las soluciones deben estar en el primer cuadrante

La región factible la hemos coloreado de amarillo:



Encontremos los vértices:

El $O(0,0)$, el $A(125, 0)$ y el $D(0, 100)$ se encuentran directamente (son las intersecciones con los ejes coordenados)

Se observa que la restricción $y \leq 125$ es redundante (es decir “sobra”)

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 200 \\ x + y = 150 \end{cases}, \text{ por reducción obtenemos } y=50, x=100$$

Otro vértice es el punto C(100, 50)

Y el último vértice que nos falta se obtiene resolviendo el sistema:

$$X+y=150$$

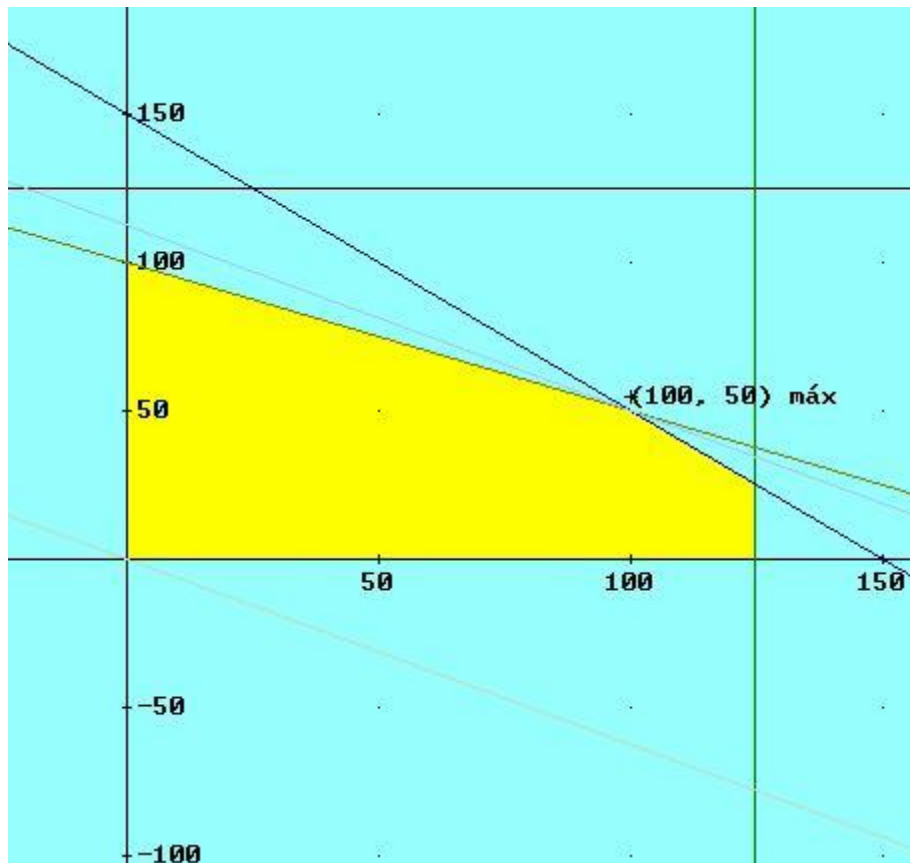
$$X=125$$

Cuya solución es: X=125, Y=25 B(125, 25)

Los vértices de la región son O(0,0), A(125,0), B(125,25) y C(100,50) y D(0,100),

Si dibujamos el vector de dirección de la función objetivo $f(x, y)=250x+ 400y$
Haciendo $250x+ 400y =0$, $y=-(250/400)x=-125x/200$

x	Y
0	0
200	-125



Se ve gráficamente que la solución es el punto (100, 50), ya que es el vértice mas alejado (el último que nos encontramos al desplazar la rectas $250x+400y=0$)

Lo comprobamos con el método analítico, es decir usando el teorema que dice que si existe solución única debe hallarse en uno de los vértices

La unción objetivo era: $f(x, y)=250x+400y$, sustituyendo en los vértices obtenemos

$$f(125,0)=31.250$$

$$f(125,25)=31.250+10.000=41.250$$

$$f(100,50)=25.000+20.000=45.000$$

$$f(0,100)=40.000$$

El máximo beneficio es 45.000 y se obtiene en el punto (100, 50)

Conclusión: se tienen que vender 100 tartas vienesas y 50 tartas reales.

3. Una escuela prepara una excursión para 400 alumnos. La empresa de transporte tiene 8 autocares de 40 plazas y 10 autocares de 50 plazas, pero solo dispone de 9

conductores. El alquiler de un autocar grande cuesta 80 euros y el de uno pequeño, 60 euros. Calcular cuantos de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo mas económica posible para la escuela.

Solución

Es un problema de programación lineal, en este caso lo que queremos es hacer mínima la función objetivo.

Llamamos x al nº de autocares de 40 plazas e y al nº de autocares de 50 plazas que alquila la escuela.

Entonces se tiene $x \leq 8$, $y \leq 10$

Como sólo hay 9 conductores se verifica que: $x + y \leq 9$

Como tienen que caber 400 alumnos se debe de verificar:

$40x + 50y \geq 400$, que simplificada quedaría $4x + 5y \geq 40$

Por lo tanto las **restricciones** que nos van a permitir calcular la región factible (conjunto de puntos solución donde se cumplen todas las condiciones) son

$$\begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0 \\ x \leq 8 & R_1 \\ y \leq 10 & R_2 \\ x + y \leq 9 & R_3 \\ 4x + 5y \geq 40 & R_4 \end{cases}$$

La función objetivo es $F(x, y) = 60x + 80y$

Dibujamos las rectas auxiliares,

r_1

r_2

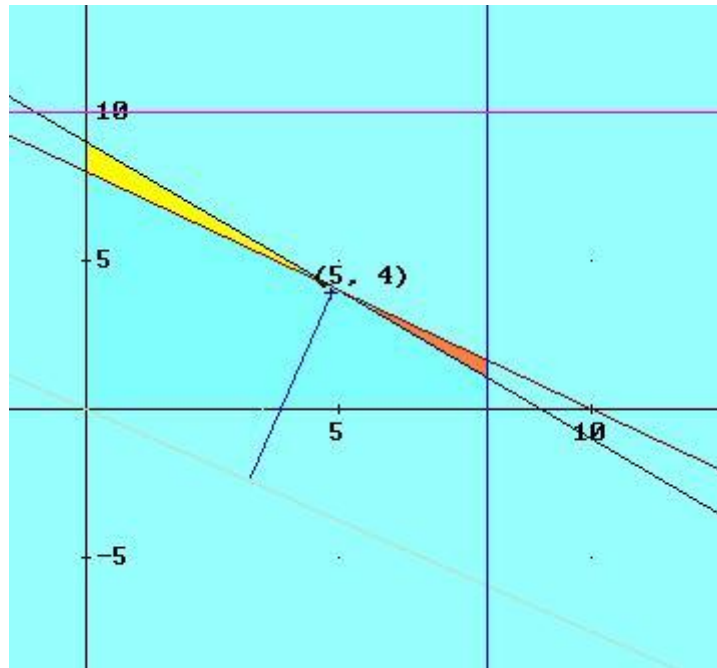
r_3

r_4

x	y	x	y	x	y	x	y
8	0	0	10	0	9	0	8
				0	9	10	0

Así como la de que corresponde a $F(x, y) = 0$ que se dibuja en rojo.

Teniendo en cuenta las restricciones (la de R_4 es la parte de arriba y que la R_3 es la parte de abajo), se encuentra la región factible. En el dibujo es la parte amarilla.



Los vértices son (0, 8), (0, 9) y el **(5, 4)**, este último es el punto de intersección de las rectas r_3 y r_4

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 4x + 5y = 40 \end{cases} \xrightarrow{\text{por reducción}} \begin{cases} 5x + 5y = 45 \\ 4x + 5y = 40 \end{cases}$$

restando ambas ecuaciones se tiene **$x = 5$** y sustituyendo en la 1ª ecuación, **$y = 4$**

Resolviendo gráficamente se llega a que el punto (5, 4) es la solución del problema. La solución óptima .

Comprobarlo sustituyendo en $F(x, y)$ todos los vértices y que este es el que da menor valor (método analítico).

4. Una compañía posee dos minas: la mina A produce cada día 1 tonelada de hierro de alta calidad, 3 toneladas de calidad media y 5 de baja calidad. La mina B produce cada día 2 toneladas de cada una de las tres calidades. La compañía necesita al menos 80 toneladas de mineral de alta calidad, 160 toneladas de calidad media y 200 de baja calidad. Sabiendo que el coste diario de la operación es de 2000 euros en cada mina ¿cuántos días debe trabajar cada mina para que el coste sea mínimo?.

Solución

Organizamos los datos en una tabla:

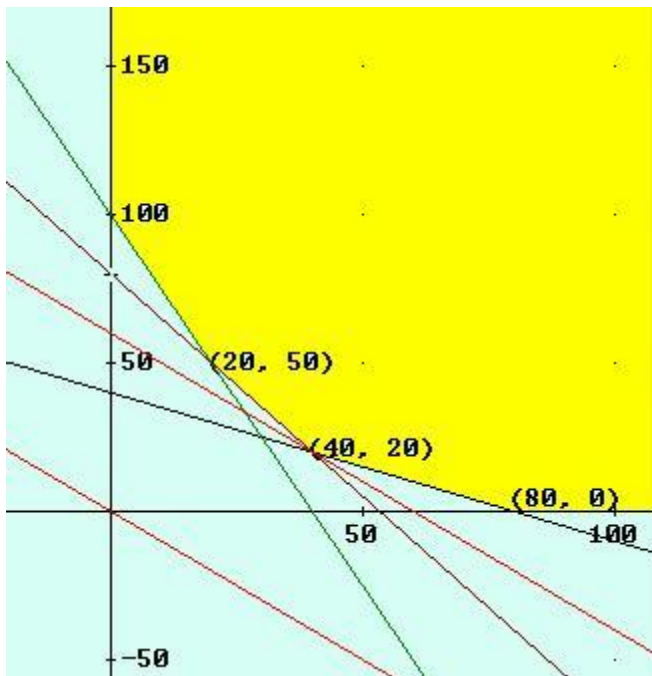
	días	Alta calidad	Calidad media	Baja calidad	Coste diario
Mina A	x	1x	3x	5x	2000x
Mina B	y	2y	2y	2y	2000y
		80	160	200	

La función objetivo $C(x, y) = 2000x + 2000y$

$$\begin{cases} x + 2y \geq 80 \\ 3x + 2y \geq 160 \\ 5x + 2y \geq 200 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Las restricciones son:

La región factible la obtenemos dibujando las rectas auxiliares: $r_1 \equiv x + 2y = 80$, $r_2 \equiv 3x + 2y = 160$ y $r_3 \equiv 5x + 2y = 200$ en el primer cuadrante y considerando la región no acotada que determina el sistema de restricciones:



Los vértices son los puntos A(0, 100), B(20, 50), C(40, 20), D(80, 0), que se encuentran al resolver el sistema que determinan dos a dos las rectas auxiliares y (y que estén dentro de la región factible).

$$r_1 \cap r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 160 \end{cases} \text{ que nos da el punto } (40, 20) \text{ (comprobarlo)}$$

$$r_2 \cap r_3 \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 160 \\ 5x + 2y = 200 \end{cases} \text{ que nos da el punto } (20, 50)$$

$r_1 \cap r_3$ no hace falta calcularlo pues queda fuera de la región factible.

En la gráfica se aprecia que el primer punto que se alcanza al desplazar la recta $C(x, y)=0$ es el $(40, 20)$. Luego la solución es trabajar 40 días en la mina A y 20 en la B. (método gráfico)

Lo comprobamos aplicando el método analítico:

$$C(0, 100)=2000 \cdot 100=200000$$

$$C(20, 50)=2000 \cdot 20+2000 \cdot 50=40000 + 100000= 140000$$

$$C(40, 20)= 2000 \cdot 40+2000 \cdot 20=80000 + 40000= 120000 \quad \text{coste mínimo}$$

$$C(80, 0)= 2000 \cdot 80 =160000$$

5. Se va a organizar una planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos. Por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble que el de electricistas. En total hay disponibles 30 electricistas y 20 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es de 250 euros por electricista y 200 euros por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio y cual es este?

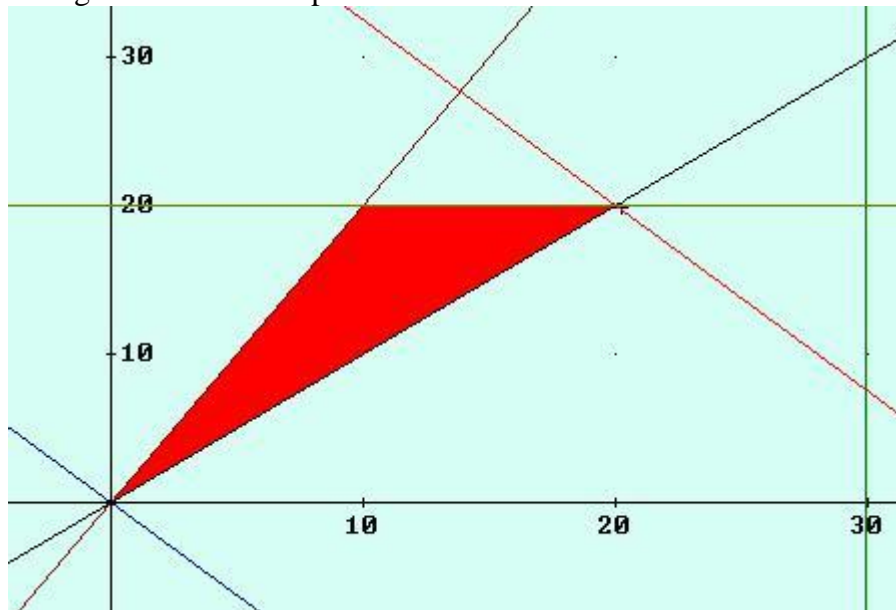
Sea $x = n^\circ$ electricistas

$y = n^\circ$ mecánicos

La función objetivo

$$f(x, y)=250x+ 200y, \text{ las restricciones } \begin{cases} y \geq x \\ y \leq 2x \\ x \leq 30 \\ y \leq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible sería para estas restricciones:



Se aprecia gráficamente (línea en rojo) que la solución óptima está en el punto (20, 20).

Por tanto:

20 electricistas y 20 mecánicos dan el máximo beneficio, y este es 9000 euros, ya que $f(x, y) = 250 \cdot 20 + 200 \cdot 20 = 9000$

6. Para recorrer un determinado trayecto, una compañía aérea desea ofertar, a lo sumo, 5000 plazas de dos tipos: T(turista) y P(primera). La ganancia correspondiente a cada plaza de tipo T es de 30 euros, mientras que la ganancia del tipo P es de 40 euros.

El número de plazas tipo T no puede exceder de 4500 y el del tipo P, debe ser, como máximo, la tercera parte de las del tipo T que se oferten.

Calcular cuántas tienen que ofertarse de cada clase para que las ganancias sean máximas.

Solución

Sea x el nº que se ofertan de tipo T, y el nº que se ofertan de tipo P.

	nº	Ganancia
Turista	x	$30x$

Primera	y	40y
Total	5000	30x +40y

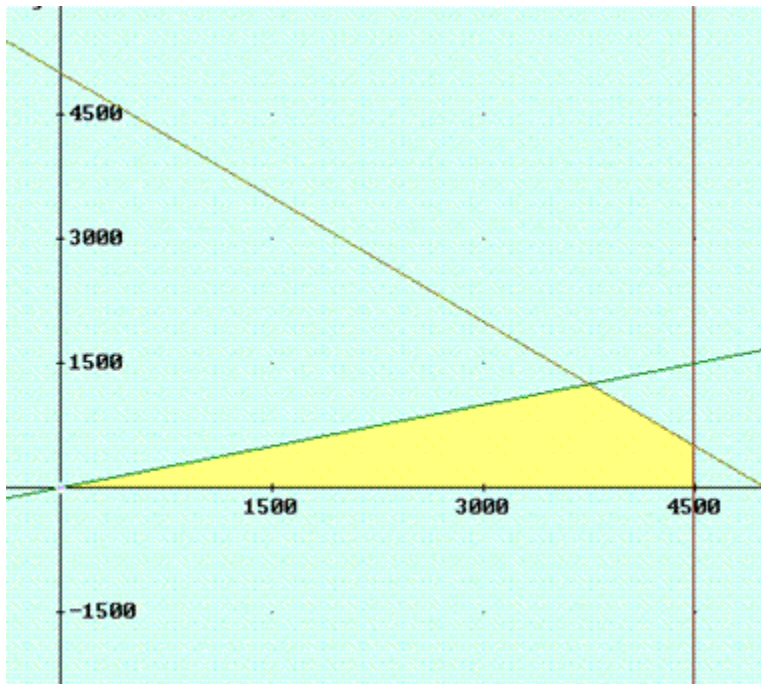
La función objetivo es:

$$f(x, y) = 30x + 40y$$

Las restricciones:

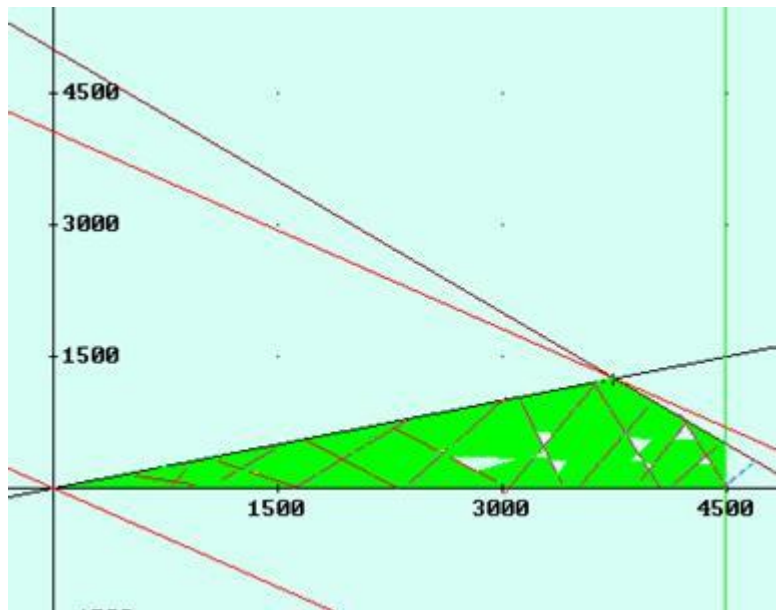
$$\begin{cases} x + y \leq 5000 \\ x \leq 4500 \\ y \leq \frac{x}{3} \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible:



Los vértices, A(0, 5000), B(3750, 1250), C(4500, 500) y D(4500, 0) (comprueba el punto B resolviendo el sistema correspondiente)

El método gráfico nos da que el punto solución es el B (3750, 1250)



Comprueba los resultados usando el método analítico (sustituyendo los puntos vértices en f y viendo q el máximo valor se obtiene en B)